Załącznik Nr 4 do uchwały Nr . . . ./23
Rady Miejskiej w Świeciu
z dnia 29 czerwca 2023 r.

Załącznik opisuje metodę równych udziałów, która jest proporcjonalną metodą wyboru projektów w oparciu o głosy wyborców.

Ogólna zasada działania metody równych udziałów

1. Metoda działa w rundach. W każdej rundzie wybierany jest jeden projekt.
2. Dla każdego wyborcy obliczana jest wartość, dalej nazywana *przysługującą mu umowną kwotą*. W pierwszej rundzie jest ona niemniejsza niż wartość budżetu podzielona przez liczbę wyborców.
3. W podstawowym scenariuszu, jeżeli projekt zostaje wybrany, jego koszt dzielony jest przez liczbę jego zwolenników (wyborców, którzy na niego zagłosowali). Wartość ta jest odejmowana od umownej kwoty przysługującej każdemu zwolennikowi projektu.
4. Siła głosów wyborców może ulec zmianie, jeśli inne projekty, na które głosowali, zostały już wybrane we wcześniejszych rundach. W każdej rundzie przeliczane są głosy oddane na projekty, tak aby głosy wyborców, którym nie przysługuje już żadna umowna kwota nie były liczone. Wybierany jest projekt, który uzyskał najwięcej głosów, lecz jednocześnie jego koszt jest nie wyższy niż całkowita pula umownych środków przysługujących jego zwolennikom.

Dokładny opis metody znajduje się poniżej.

Szczegółowy opis metody równych udziałów

1. Podstawowy algorytm metody równych udziałów (dalej jako: *podstawowy algorytm*) działa następująco:
   1) Algorytm działa w rundach, w każdej rundzie oznaczając jeden projekt jako wybrany.
   2) Początkowo każdemu wyborcy przypisana jest umowna kwota. Sposób obliczania umownej kwoty opisany jest w ust. 2. pkt 2).
   3) Na początku każdej rundy następuje przeliczanie głosów. Brane są pod uwagę tylko projekty, które nie zostały jeszcze wybrane i których realizacja nie stoi w sprzeczności z poprzednio wybranymi projektami. Dla takich projektów głosy są przeliczane w następujący sposób:
      a. Jeżeli koszt projektu jest wyższy niż całkowita pula umownych środków przysługujących wyborcom, którzy na niego zagłosowali, to projekt zostaje *odrzucony* i nie jest dalej brany pod uwagę.
      b. W przypadku każdego z pozostałych projektów oblicza się jak umowne koszty projektu rozkładają się na jego zwolenników.
         i. W umownym opłaceniu projektu uczestniczą wyłącznie wyborcy którzy na niego zagłosowali,
         ii. Płatność żadnego wyborcy nie przekracza przypisanej mu umownej kwoty,
         iii. Jeśli jest taka możliwość, wszyscy wyborcy płacą za wybrany projekt taką samą umowną kwotę.
         iv. Jeśli któryś ze zwolenników danego projektu nie ma już umownych środków, pozwalających pokryć koszty swojego poparcia dla tego projektu, płaci tyle umownych środków, ile jeszcze mu przysługuje. Brakującą umowną kwotą obciąża się pozostałych zwolenników projektu.
      c. Jeśli wyborca nie miał już pełnej umownej kwoty pozwalającej opłacić jego udział w popieranym projekcie, jego głos ma mniejszą wagę. Waga ta jest równa pozostającej mu jeszcze w dyspozycji umownej kwocie podzielonej przez koszt przypadający na tego zwolennika danego projektu, na którego przypadały największe umowne koszty. Przy ustalaniu liczby głosów oddanych na projekt uwzględnia się takie wagi.

4) W danej rundzie wybierany jest projekt, który po przeliczeniu uzyskał największą liczbę głosów. Jeżeli wystąpi remis, to stosowana jest reguła rozstrzygania remisów, opisana w ust. 3. Następnie, umowne kwoty przypisane wyborcom są pomniejszane o ich płatności za wybrany projekt.

5) Po zakończeniu rundy algorytm rozpoczyna kolejną rundę lub kończy działanie. Algorytm kończy działanie, jeżeli wszystkie niewybrane jeszcze projekty zostały odrzucone.

2. *Metoda równych udziałów* wykorzystuje algorytm podstawowy i działa następująco.

   1) Dla każdego projektu sprawdzany jest następujący warunek: czy liczba wyborców, którzy zagłosowali na ten projekt, podzielona przez liczbę wszystkich wyborców jest większa bądź równa kosztowi projektu podzielonemu przez trzykrotną wartość dostępnego budżetu. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to projekt jest odrzucany i nie jest rozważany w kolejnych krokach.

   2) W kolejnym kroku podstawowy algorytm jest uruchamiany wielokrotnie dla różnych wartości umownej kwoty przypisanej wyborcom. Ostateczna umowna kwota ustalana jest jako najmniejsza całkowita wartość dla której koszt projektów obliczonych przez algorytm podstawowy przekroczy budżet, pomniejszona o jeden. Jeżeli całkowity koszt projektów wybranych przez algorytm podstawowy dla tak ustalonej kwoty jest mniejszy niż kwota budżetu, to dobierane są dodatkowe projekty za pomocą algorytmu większościowego, opisanego w ust. 2. pkt 3). Tak wyznaczone rozwiązanie będzie dalej nazywane *rozwiązaniem podstawowym*.

   3) Algorytm większościowy służy do dopełniania rozwiązania obliczonego przez algorytm podstawowy oraz do jego weryfikacji. Algorytm większościowy odpowiada standardowej procedurze używanej w budżetach obywatelskich. Algorytm ten wybiera projekty w następujący sposób:

      a. Algorytm działa w rundach, w każdej rundzie wybierając jeden projekt. W danej rundzie wybierany jest projekt, który uzyskał największą liczbę głosów spośród projektów spełniających warunki:
         i. Wybranie projektu nie spowoduje przekroczenia budżetu,
         ii. Projekt nie stoi w sprzeczności z żadnym z wybranych projektów.
      b. Jeżeli żaden projekt nie spełnia wyżej wymienionych warunków, to algorytm kończy działanie.
      c. Jeżeli w którejkolwiek rundzie wystąpi remis, to stosowana jest reguła rozstrzygania remisów, opisana w ust. 3.

      Rozwiązanie wyznaczone przez algorytm większościowy będzie dalej nazywane *rozwiązaniem większościowym*.

   4) Dla każdego wyborcy obliczana jest liczba projektów w rozwiązaniu podstawowym na które wyborca zagłosował. Podobnie obliczana jest liczba projektów w rozwiązaniu większościowym na które wyborca zagłosował. Uznaje się, że wyborca preferuje rozwiązanie podstawowe, jeżeli pierwsza z tych liczb jest większa niż druga. Jeżeli druga z tych liczb jest większa niż pierwsza, uznaje się, że wyborca preferuje rozwiązanie większościowe. Jeżeli więcej wyborców preferuje rozwiązanie podstawowe od rozwiązania większościowego, to stosowane jest rozwiązanie podstawowe. W przeciwnym wypadku stosowane jest rozwiązanie większościowe.

3. Remisy są rozstrzygane według następującej reguły. Przed uruchomieniem metody równych udziałów, losowany jest ranking projektów. Gdy występuje remis, wybierany jest ten projekt, spośród tych, które remisują, który otrzymał najwięcej głosów. Jeżeli więcej niż jeden projekt otrzymał najwięcej głosów, wybierany jest ten o najniższym koszcie. Jeżeli jest więcej niż jeden taki projekt, to spośród nich wybierany jest ten, który jest najwyżej w wylosowanym rankingu.

Wyżej opisane warunki są również opisane w postaci wzorów matematycznych w części Zapis matematyczny. Metoda równych udziałów jest również zilustrowana jako algorytmy na Schemacie 1, Schemacie 2 i Schemacie 3, które znajdują się w części Zapis algorytmiczny.

Zapis matematyczny

Poniższa część załącznika zawiera wzory matematyczne, które stanowią uzupełnienie opisu metody równych udziałów. Opis metody podany w części Szczegółowy opis metody równych udziałów jest pełny, a poniższe wzory stanowią jedynie dodatkowy zapis tych samych warunków, które zostały w niej opisane słownie. Poniższy opis używa następujących oznaczeń:

B :	całkowita kwota budżetu, wyrażona w złotówkach.
N :	zbiór wyborców, którzy oddali ważny głos.
$N(P)$:	zbiór wyborców, którzy oddali ważny głos na projekt P.
$\text{koszt}(P)$:	koszt projektu P. Dla określenia kosztu projektów stosuje się wycenę ostateczną dokonaną przez Burmistrza.
M :	początkowa umowna kwota przysługująca każdemu wyborcy. Wyznaczana zgodnie z ust. 2. pkt 3) w części Szczegółowy opis metody równych udziałów.
$M(x, y)$:	umowna kwota przysługującą wyborcy x w rundzie y. W pierwszej rundzie każdemu wyborcy przysługuje kwota M, czyli dla każdego wyborcy x ze zbioru N liczba $M(x, 1)$ jest ustalona na wartość M.

1) Wzór opisujący warunek, kiedy projekt P zostaje odrzucony w rundzie y; ust. 1. pkt 3) a. w części Szczegółowy opis metody równych udziałów:

$$\sum_{x \in N(P)} M(x, y) < \text{koszt}(P),$$

2) Wzory opisujące przeliczanie głosów w rundzie y; ust. 1. pkt 3) b. i ust. 1. pkt 3) c. w części Szczegółowy opis metody równych udziałów.

   Dla projektu P wyznaczana jest najmniejsza liczba $X(P)$ spełniająca warunek:

$$\sum_{x \in N(P)} \min\Big(M(x, y), X(P)\Big) = \text{koszt}(P).$$

   Projekt P po przeliczeniu otrzymuje następującą liczbę głosów:

$$\sum_{x \in N(P)} \min\left(1, \frac{M(x, y)}{X(P)}\right).$$

3) Wzór do wyliczania wartości umownej kwoty przysługującej wyborcy x w rundzie $y + 1$, przy założeniu, że $P(y)$ oznacza projekt wybrany w rundzie y; ust. 1. pkt 4) w części Szczegółowy opis metody równych udziałów:

$$M(x, y+1) = \begin{cases} M(x, y) - \min\left(X(P(y)), M(x, y)\right) & \text{jeżeli } x \text{ głosował na } P(y), \\ M(x, y) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

4) Wzór na warunek odrzucania projektów w pierwszym kroku metody równych udziałów; ust. 2. pkt 1)) w części Szczegółowy opis metody równych udziałów:

$$\text{projekt } P \text{ jest odrzucany jeśli: } \frac{|N(P)|}{N} < \frac{\text{koszt}(P)}{3 \cdot B}.$$

Zapis algorytmiczny

Poniższa część załącznika zawiera opis metody równych udziałów w postaci algorytmów zilustrowanych na trzech rysunkach. Opis metody podany w części Szczegółowy opis metody równych udziałów jest pełny, a ta część zawiera jedynie dodatkowy zapis. Zapis ten jest w szczególności przydatny do komputerowego obliczania wyników wyborów. Zapis ten używa oznaczeń wprowadzonych w części Zapis matematyczny.

argumenty: M: kwota przysługująca każdemu wyborcy.
N: zbiór wyborców, którzy oddali ważny głos.
$\mathcal{P}$: zbiór projektów dopuszczonych do głosowania.
$W \leftarrow \emptyset$.
dla każdego wyborcy $x \in N$, $M(x) \leftarrow M$ (komentarz: $M(x)$ to umowna ilość środków, którą w obecnej rundzie dysponuje wyborca x)
dopóki *prawda*
  dla każdego $P \in \mathcal{P} \setminus W$ **wykonaj**
    jeżeli $\sum_{x \in N(P)} M(x) < \text{koszt}(P)$ **to wykonaj**
      $X(P) \leftarrow \infty$ (komentarz: wyborcy popierający P nie dysponują wystarczającą ilością środków, więc P nie może zostać wybrany)
    w przeciwnym przypadku
      Niech $x_1, \ldots, x_t$ oznacza listę wyborców $x \in N(P)$ posortowaną tak aby $M(x_1) \leq \cdots \leq M(x_t)$.
      dla każdego $s = 0, \ldots, t-1$ **wykonaj**
        $X(P) \leftarrow (\text{koszt}(P) - (M(x_1) + \cdots + M(x_s)))/(t-s)$
        jeżeli $X(P) \leq M(x_{s+1})$ **to wykonaj**
          przerwij pętlę (komentarz: wartość $X(P)$ została znaleziona)
      $\text{glosy}(P) \leftarrow \sum_{x \in N(P)} \min\left(1, \frac{M(x)}{X(P)}\right)$
  jeżeli $\min_{P \in \mathcal{P} \setminus W} X(P) = \infty$ **to wykonaj**
    zwróć W
  $P_{\text{zw}} \leftarrow \text{argmax}_{P \in \mathcal{P} \setminus W} \text{glosy}(P)$ (komentarz: projekt, który uzyskał najwięcej głosów po przeliczeniu; rozwiązywanie ewentualnych remisów tak jak opisano w części Szczegółowy opis metody równych udziałów, ust. 3; omijane zostają projekty, które stoją w sprzeczności z projektami z W)
  $W \leftarrow W \cup \{P_{\text{zw}}\}$
  dla każdego $x \in N(P_{\text{zw}})$ **wykonaj**
    $M(x) \leftarrow M(x) - \min\left(X(P_{\text{zw}}), M(x)\right)$

Schemat 1: Algorytm podstawowy dla metody równych udziałów.

argumenty: B: dostępny budżet.
N: zbiór wyborców, którzy oddali ważny głos.
$\mathcal{P}$: zbiór projektów dopuszczonych do głosowania.
W_{pocz}: początkowy zbiór projektów.
$W \leftarrow W_{\text{pocz}}$
$L \leftarrow$
posortowana lista projektów $P \in \mathcal{P} \setminus W_{\text{pocz}}$ od największych wartości $|N(P)|$ do najmniejszych;
rozwiązywanie ewentualnych remisów tak jak opisano w części Szczegółowy opis metody równych udziałów, ust. 3
$K \leftarrow$ całkowity koszt projektów z W_{pocz}
dla każdego $P \in L$ **wykonaj**
  jeżeli $K + \text{koszt}(P) \leq B$
  to wykonaj
    (komentarz: jeżeli P stoi w sprzeczności z jakimikolwiek projektami z W, to nie zostaje wybrany)
    $K \leftarrow K + \text{koszt}(P)$
    $W \leftarrow W \cup \{P\}$
zwróć W

Schemat 2: Algorytm większościowy.

argumenty: B: dostępny budżet.
N: zbiór wyborców, którzy oddali ważny głos.
$\mathcal{P}_{\text{pocz}}$: zbiór projektów dopuszczonych do głosowania.
$\mathcal{P} \leftarrow \left\{P \in \mathcal{P}_{\text{pocz}} \colon \frac{|N(P)|}{N} \geq \frac{\text{koszt}(P)}{3 \cdot B}\right\}$
dla każdego $M = 0, \ldots, B$ **wykonaj**
  $Z_1 \leftarrow$ zbiór zwrócony przez algorytm bazowy dla argumentów M, N i $\mathcal{P}$
  jeżeli $\sum_{P \in Z_1} \text{koszt}(P) > B$ **to wykonaj**
    przerwij pętlę (komentarz: wartość M została znaleziona)
$Z_0 \leftarrow$ zbiór zwrócony przez algorytm podstawowy dla argumentów $(M-1)$, N i $\mathcal{P}$
$Z_1 \leftarrow$ zbiór zwrócony przez algorytm większościowy dla argumentów B, N, $\mathcal{P}$ i Z_0
$Z_2 \leftarrow$ zbiór zwrócony przez algorytm większościowy dla argumentów B, N, $\mathcal{P}$ i $\emptyset$
$n_1 \leftarrow |\{x \in N \colon |\{P \in Z_1 \colon x \in N(P)\}| > |\{P \in Z_2 \colon x \in N(P)\}|\}|$
$n_2 \leftarrow |\{x \in N \colon |\{P \in Z_2 \colon x \in N(P)\}| > |\{P \in Z_1 \colon x \in N(P)\}|\}|$
jeżeli $n_1 > n_2$ **to wykonaj**
  zwróć Z_1
w przeciwnym przypadku
  zwróć Z_2

Schemat 3: Metoda równych udziałów.